Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόοδος - 01/04/2026

11:00 - 13:00, Αμφ. 201

1. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Λύση. Χωριζόμενες μεταβλητές:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$$

άρα η γενική λύση είναι

$$y(x) = \frac{x}{1+Cx} \ \text{ και } \ y(x) = 0.$$

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -x^2y^2, \ \ y(1) = y_0.$$

Λύση. Εξίσωση $Bernoulli$. Αντικατάσταση $z(x) = 1/y(x)$, για την $z(x)$ έχουμε

$$z' - \frac{1}{z} = x^2 \quad \Rightarrow \quad z(x) = \frac{x^3+2Cx}{2}$$

άρα

$$y(x) = \frac{2}{x^3+2Cx} \ \text{ και } \ y(x) = 0.$$

Λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$C = \frac{2-y_0}{2y_0} \ \text{ για } \ y_0 \neq 0$$

συνεπώς

$$y(x) = \frac{2y_0}{y_0x^3 + x(2-y_0)}.$$

3. Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσης

$$y'' + 4y = \frac{2}{\sin 2x} + 8xe^{2x}.$$

Λύση. Γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης:

$$y_o(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Μερική της

$$y'' + 4y = \frac{2}{\sin 2x}$$

(μέθοδος μεταβαλλόμενων σταθερών) είναι

$$y_{\mu 1} = -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \ln |\sin 2x|.$$

Μερική της

$$y'' + 4y = 8xe^{2x}.$$

(μέθοδος προσδιοριζόμενων σταθερών) είναι

$$y_{\mu 2} = e^{2x}(x - \frac{1}{2}).$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \ln |\sin 2x| + e^{2x}(x - \frac{1}{2}).$$

4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$x^2 y'' + 2xy' = 2 \ln x, \quad x > 0,$$
$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Λύση. Εξίσωη $Euler$, άρα για $y(t)$ με $t = \ln x$, έχουμε

$$y'' + y' = 2t \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + t^2 - 2t$$

δηλαδή

$$y(x) = C_1 + C_2 \frac{1}{x} + \ln^2 x - 2 \ln x.$$

Από αρχικές συνθήκες:

$$y(1) = C_1 + C_2 = 0, \quad y'(1) = -C_2 - 2 = 0$$

συνεπώς

$$y(x) = 2 - \frac{2}{x} + \ln^2 x - 2 \ln x.$$